拉格朗日中值定理

数学分析

李本正

电子科技大学

2026 年 1 月 4 日

问题引入

实际问题

一辆汽车在一段时间内行驶了一段路程，从整体来看，它有一个平均速度。

问题：在这段时间里，是否一定存在某一时刻，汽车的瞬时速度恰好等于这段时间的平均速度？

问题引入

实际问题

一辆汽车在一段时间内行驶了一段路程，从整体来看，它有一个平均速度。

问题：在这段时间里，是否一定存在某一时刻，汽车的瞬时速度恰好等于这段时间的平均速度？

数学化表述

设函数 $s(t)$ 表示物体在时间 t 的位置，在区间 $[t_1, t_2]$ 上，平均变化率为

$$\frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

是否存在 $t_0 \in (t_1, t_2)$，使得

$$s'(t_0) = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}\ ?$$

拉格朗日中值定理

定理

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，则存在 $c \in (a,b)$，使得

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

- 左边：切线斜率（瞬时变化率）
- 右边：割线斜率（平均变化率）

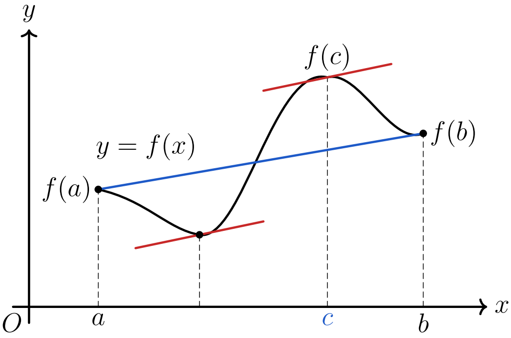
拉格朗日中值定理

定理

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，则存在 $c \in (a,b)$，使得

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

- 左边：切线斜率（瞬时变化率）
- 右边：割线斜率（平均变化率）



证明的关键工具：Rolle 定理

定理 (Rolle 定理)

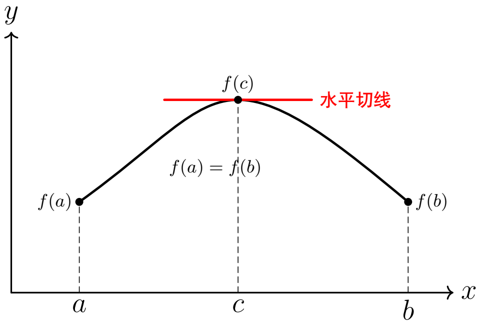
设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内可导，且 $f(a) = f(b)$，则存在 $c \in (a, b)$，使 $f'(c) = 0$。

- 几何直观：
  首尾等高 $\Rightarrow$ 中间必有“水平切线”
- 拉格朗日中值定理的证明将转化为 Rolle 定理

定理 (Rolle 定理)

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)$，则存在 $c\in(a,b)$，使 $f'(c)=0$。

- 几何直观：
  首尾等高 $\Rightarrow$ 中间必有“水平切线”
- 拉格朗日中值定理的证明将转化为 Rolle 定理



拉格朗日中值定理的证明

证明:
由 Rolle 定理，存在 $c \in (a,b)$ 使得 $g'(c) = 0$。

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{1}$$

拉格朗日中值定理的证明

证明:
由 Rolle 定理，存在 $c \in (a,b)$ 使得 $g'(c) = 0$。

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{1}$$

代入 $x = c$:

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \Rightarrow \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{2}$$

条件必要性：为什么要“可导”？

反例（连续但不可导）

令 $f(x) = |x|$，取区间 $[-1,1]$：

$$\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)} = \frac{1-1}{2} = 0.$$

若中值定理成立，应存在 $c \in (-1,1)$ 使 $f'(c) = 0$。

但事实上：$f'(x) = 1$ $(x > 0)$，$f'(x) = -1$ $(x < 0)$，且在 $x = 0$ 不可导，因此不存在 c 使 $f'(c) = 0$。

结论：没有可导性，就不能保证中值定理成立。

例题：找一个满足条件的 c

例：$f(x) = x^2$，区间 $[1,3]$

$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{9-1}{2} = 4.$$

中值定理保证存在 $c \in (1,3)$ 使得 $f'(c) = 4$。

因为 $f'(x) = 2x$，解得

$$2c = 4 \Rightarrow c = 2 \in (1,3).$$

应用一：用中值定理证明单调性

命题

若 $f'(x) > 0$ 在 (a, b) 恒成立，则 f 在 $[a, b]$ 上严格递增。

应用一：用中值定理证明单调性

命题

若 $f'(x) > 0$ 在 (a, b) 恒成立，则 f 在 $[a, b]$ 上严格递增。

证明思路.

取任意 $x_1 < x_2$，由中值定理存在 $c \in (x_1, x_2)$：

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

由于 $f'(c) > 0$ 且 $x_2 - x_1 > 0$，所以 $f(x_2) - f(x_1) > 0$，即 $f(x_2) > f(x_1)$。 $\square$

应用二：一个经典不等式 $\ln(1+x) < x \ (x > 0)$

令 $f(t) = \ln(1+t)$，在 $[0, x]$（$x > 0$）上连续可导。由中值定理，存在 $c \in (0, x)$ 使

$$\ln(1+x) - \ln(1+0) = f'(c)\,x = \frac{1}{1+c}\,x.$$

因此

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1+c} < x \quad (\text{因为} c > 0 \Rightarrow 1 + c > 1).$$

总结

- 拉格朗日中值定理刻画了**整体平均变化**与**局部瞬时变化**之间的联系
- 连续性与可导性是保证结论成立的关键条件
- 定理的证明思路：**构造辅助函数** $\Rightarrow$ **转化为 Rolle 定理**
- 中值定理是研究函数性态与估计函数值的基本工具
- **结构视角**： Rolle 定理 $\Rightarrow$ 拉格朗日中值定理 $\Rightarrow$ 柯西中值定理